巾空間の間の写像(位相空間論と関連する諸問題)

細川, 洋

数理解析研究所講究録
953巻 1996年 100-105

巾空間の間の写像

東京学芸大学　細川　洋　(Hiroshi Hosokawa)

コンパクトで連結な距離空間を連続体という。ここでは X 及び Y は常に2点以上の点を持つ連続体とし、これらの距離関数を同じ文字 d で表す。

連続体 X の巾空間 $C(X)$ とは、集合

$C(X)=\{K : K$ は X の空でない部分連続体$\}$

に、次の式で定義される距離（ハウスドルフの距離）H_d を入れたものである：

$$H_d(K, L) = \inf\{\varepsilon : N_\varepsilon(K) \supset L \text{ かつ } N_\varepsilon(L) \supset K\}.$$

ここで、$N_\varepsilon(K)$ は K の X における ε-近傍である。

$C(X)$ はこの距離で連続体になる。

今 X から Y の上への写像（写像は常に連続であるとする）$f : X \to Y$ を考える。$C(X)$ の元 K に対し、その f による像 $f(K)$ を対応させる $C(X)$ から $C(Y)$ への対応は、連続になる。この写像を $C(f) : C(X) \to C(Y)$ と書く。

定義　写像 $f:X\to Y$ は、上への写像で、かつ $C(Y)$ の任意の元 L 及び $f^{-1}(L)$ の任意の連結成分 K に対して常に $f(K)=L$ を満たすとき、コンフルエントであるという。

写像 $f:X\to Y$ がコンフルエントであることは、写像 $C(f):C(X)\to C(Y)$ がコンフルエントであるための必要条件であるが、十分条件ではない。以下では $C(f)$ がコンフルエントになるための十分条件を考える。

閉区間 $[0,1]$ と同位相な空間を、連続曲線と呼ぶことにする。

補題 1.　写像 $f:X\to Y$ がコンフルエントで、$\mathcal{L}$ が $C(Y)$ の中の連続曲線ならば、$C(f)^{-1}(\mathcal{L})$ の任意の連結成分 $\mathcal{K}$ に対し、$C(f)(\mathcal{K})=\mathcal{L}$ である。

この証明は長いので省略する。補題 1 から次のことが容易にわかる。

系 2.　連続写像 $f:X\to Y$ がコンフルエントとする。このとき、$C(Y)$ の任意の弧状連結な部分集合 $\mathcal{L}$ 及び、$C(f)^{-1}(\mathcal{L})$ の任意の連結成分 $\mathcal{K}$ に対し、$C(f)(\mathcal{K})=\mathcal{L}$ である。

系 3. 写像 $f: X \to Y$ がコンフルエントで、Y が局所連結ならば、$C(f)$ はコンフルエントである。

証明　Y が局所連結であるから、$C(Y)$ も局所連結である。$\mathcal{L}$ を $C(Y)$ の部分連続体，$\mathcal{K}$ を $C(f)^{-1}(\mathcal{L})$ の連結成分とする。$C(Y)$ は局所連結であるから、次の条件を満たす $C(Y)$ の部分集合の列 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots$ が存在する。

(1)　各 $\mathcal{L}_n$ は弧状連結な閉集合である。

(2)　$\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \mathcal{L}_3 \supset \cdots$ 。

(3)　$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$ 。

各 n に対し、$\mathcal{K}$ を含む $C(f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$ の連結成分を $\mathcal{K}_n$ とする。系 2 から、$C(f)(\mathcal{K}_n) = \mathcal{L}_n$ である。よって、$C(f)$ の連続性と $C(f)$ の定義から　$C(f)(\mathcal{K}) = C(f)(\cap \mathcal{K}_n) = \cap C(f)(\mathcal{K}_n)$
$= \cap \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$.

系 3 の Y の条件を弱めるために、次の 3 つの補題を使う。

補題 4. (J. J. Charatonik & W. J. Charatonik)
すべての n について、Y_n が連続体で $\psi_n: Y_{n+1} \to Y_n$ がコンフルエントならば、射影 $p_n: \varprojlim\{Y_n, \psi_n\} \to Y_n$ は

コンフルエントである。

補題 5. (J. J. Charatonik & W. J. Charatonik)
$X = \varprojlim\{X_n, \varphi_n\}$, $Y = \varprojlim\{Y_n, \psi_n\}$, 各 X_n, Y_n は連続体とする。各 n について、写像 $h_n : X_n \to Y_n$ がコンフルエントで, $\psi_n \circ h_{n+1} = h_n \circ \varphi_n$ を満たせば、$\{h_n\}$ で決まる写像 $h_\infty : X \to Y$ はコンフルエントである。

補題 6. (J. Segal)　$Y = \varprojlim\{Y_n, \psi_n\}$, (各 Y_n は連続体), $C_\infty(Y) = \varprojlim\{C(Y_n), C(\psi_n)\}$ とすると $C_\infty(Y)$ と $C(Y)$ は同位相である。

補題 6 の位相写像 $g : C_\infty(Y) \to C(Y)$ は具体的には、$B = (B_1, B_2, \cdots) \in C_\infty(Y)$ に対し $g(B) = \varprojlim\{B_n, \psi_n|B_{n+1}\}$ なる写像である。

定理 7. 連続体 Y が

(1) $Y = \varprojlim\{Y_n, \psi_n\}$,

(2) 各 Y_n は局所連結な連続体,

(3) 各 ψ_n はコンフルエント

なる形で表せるとき, 任意のコンフルエント写像 $f : X \to Y$

に対し、$C(f):C(X)\to C(Y)$ はコンフルエントである。

証明　補題6の位相写像を $g:C_\infty(Y)\to C(Y)$ とする。また、各 n に対し、$p_n:Y\to Y_n$ を射影とする。コンフルエント写像の合成はコンフルエントであるから、$p_n\circ f$ はコンフルエントである。各 Y_n は局所連結であるから、系3より、$C(p_n\circ f):C(X)\to C(Y_n)$ はコンフルエントである。また、$C(X)$ と $\varprojlim\{C(X),id\}$ は同一視できるから、$C(\psi_n)\circ C(p_n\circ f)=C(\psi_n\circ p_n\circ f)=C(p_{n-1}\circ f)$ より補題5が適用できて、$\{C(p_n\circ f)\}$ できまる写像 $[C(p_n\circ f)]_\infty:C(X)\to C_\infty(Y)$ はコンフルエントである。この写像と g の形から、$C(f)=g\circ[C(p_n\circ f)]_\infty$ であることがわかる。よって $C(f)$ はコンフルエントになる。

　中空間 $C(X)$ 内の連続曲線 $\mathcal{A}$ が、$\mathcal{A}$ 内の任意の元 A_1,A_2 に対し、常に $A_1\subset A_2$ または $A_2\subset A_1$ であるとき、$\mathcal{A}$ を順序弧という。$T(X)=\{\mathcal{A}:\mathcal{A}$ は $C(X)$ 内の順序弧$\}\cup\{K:K\in C(X)\}$ とする。$T(X)$ は $C(C(X))$ の部分連続体である。

　写像 $f:X\to Y$ が、任意の元 $K\in C(X)$ に対し、$f|K:K\to f(K)$ はコンフルエントであるとき、遺伝的

にコンフルエントであるという。

定理 8. 上への写像 $f: X \to Y$ が

(1) コンフルエントであるための必要十分条件は、任意の $\beta \in \Gamma(Y)$, 任意の $L \in \beta$ 及び $f^{-1}(L)$ の任意の連結成分 K に対し、$K \in \alpha$, $C(f)(\alpha) = \beta$ となる $\Gamma(X)$ の元 α が存在することである。

(2) 遺伝的にコンフルエントであるための必要十分条件は、任意の $\beta \in \Gamma(Y)$, 任意の $L_1, L_2 \in \beta$, 任意の $K_i \in C(f)^{-1}(L_i)$ $(i=1,2)$ に対し、$K_1 \subset K_2$ ならば $K_1, K_2 \in \alpha$, $C(f)(\alpha) = \beta$ なる $\Gamma(X)$ の元 α が存在することである。